

Método lineal de resolución para sistemas de tuberías complejos

MC2314. Mecánica de Fluidos III

Prof. Geanette Polanco

Ene-Mar 2011

Sistemas de tuberías

Caso tipo:

Se requiere resolver la distribución de caudales del sistema de tuberías.



Se identifica el número de incógnitas a resolver



Se identifican las ecuaciones que comprenden el sistema de ecuaciones a resolver



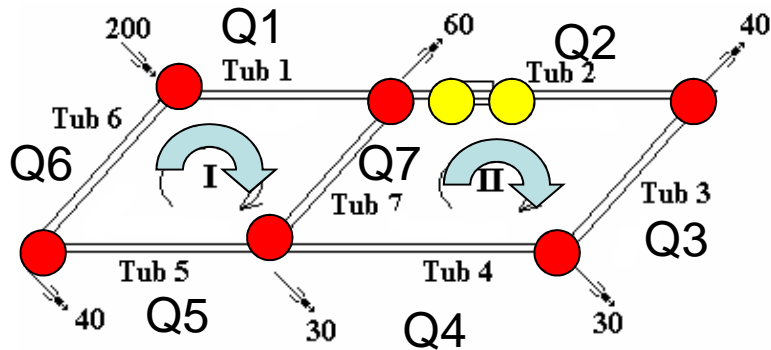
Primero se identifican los nodos que indican el número de ec. de continuidad (Sistema abierto, N ó cerrado, $N-1$)

Se identifican las mallas o pseudomallas que indican el número de ec. de energía, cuidando de no generar ecuaciones redundantes

Se construye el sistema de ecuaciones representativo del sistema físico



Método lineal: Caso tipo (Análisis)



¿Cuántos nodos hay en el sistema? ●

6 Nodos

¿Cuántas mallas hay en el sistema? ↻

2 mallas

¿Cuántas pseudo-mallas hay en el sistema? ↻

0 pseudo-mallas

¿Cuántos caudales desconocidos hay en el sistema?

7 Caudales, Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6 y Q7

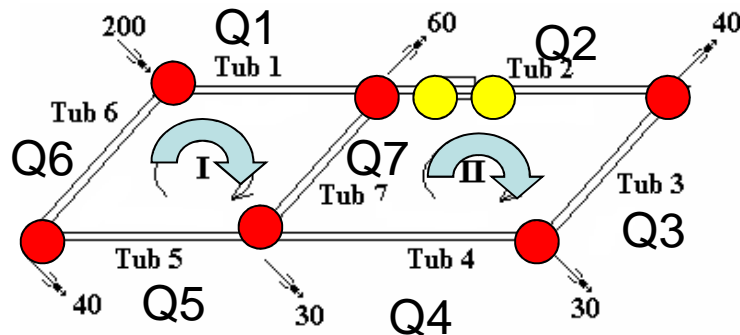
→ **Sistema de ecuaciones de**
7 x 7

¿Cómo queda el sistema de ecuaciones del sistema?

5 Continuidad (6 nodos – 1 nodo) → **red cerrada**

2 Balance de energía (2 mallas + 0 pseudo-mallas)

Método lineal: Caso tipo (Sistema de ecuaciones)



Sistema de ecuaciones de

7 x 7

(5 Continuidad +
2 Balance de energía)

¿Cómo queda el sistema de ecuaciones del sistema?

$$\begin{aligned} 0,2 - Q1 - Q6 &= 0 \\ Q1 - Q2 - Q7 - 0,06 &= 0 \\ Q2 - Q3 - 0,04 &= 0 \\ Q3 + Q4 - 0,03 &= 0 \\ Q7 + Q5 - Q4 - 0,03 &= 0 \end{aligned}$$

Hasta este punto solo se han supuesto sentidos más no magnitudes de flujo

$$\begin{aligned} R1 * Q1^2 + R7 * Q7^2 - R5 * Q5^2 - R6 * Q6^2 &= 0 \\ R2 * Q2^2 + R3 * Q3^2 - R4 * Q4^2 - R7 * Q7^2 &= 0 \end{aligned}$$

Método lineal: Caso tipo (Definición)

- El Método Lineal se basa en la **linealización** de las ecuaciones de energía para cada malla o pseudomalla, para resolverlas paralelamente junto con las ecuaciones de continuidad

$$\begin{aligned} R1 * Q1^2 + R7 * Q7^2 - R5 * Q5^2 - R6 * Q6^2 &= 0 \\ R2 * Q2^2 + R3 * Q3^2 - R4 * Q4^2 - R7 * Q7^2 &= 0 \end{aligned}$$



$$R1 * Q^2 = R1 * Q1 * Q1$$

$$K1 = R1 * Q1$$

$$R1 * Q^2 = K1 * Q1$$

$$K1 * Q1 + K7 * Q7 - K5 * Q5 - K6 * Q6 = 0$$

$$K2 * Q2 + K3 * Q3 - K4 * Q4 - K7 * Q7 = 0$$

Método lineal: Caso tipo (Definición con bombas)

- En caso de existir una bomba en el sistema también se debe linealizar.

$$H_{\text{bomba}} = A_{\text{bomba}} * Q^2 + C_{\text{bomba}}$$



$$H_{\text{bomba}} = \text{Coef_A} * Q + C_{\text{bomba}}$$

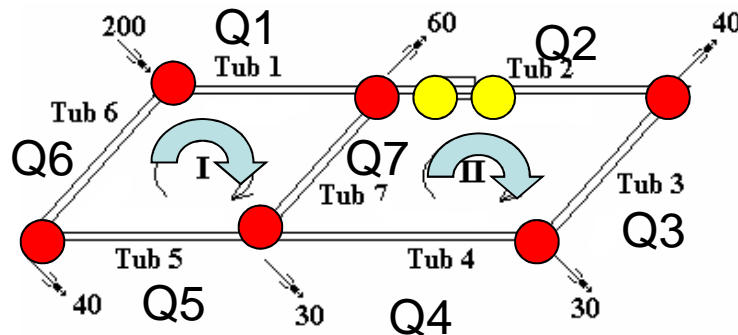
$$A_{\text{bomba}} * Q^2 = A_{\text{bomba}} * Q * Q$$

$$\text{Coef_A} = A_{\text{bomba}} * Q$$

$$A_{\text{bomba}} * Q^2 = \text{Coef_A} * Q$$

NOTA: La bomba no está definida para valores de caudal negativos

Método lineal: Caso tipo (Sistema de ecuaciones linealizado)



Sistema de ecuaciones de

7 x 7

(5 Continuidad +
2 Balance de energía)

¿Cómo queda el sistema de ecuaciones del sistema?

$$\begin{aligned} 0,2 - Q1 - Q6 &= 0 \\ Q1 - Q2 - Q7 - 0,06 &= 0 \\ Q2 - Q3 - 0,04 &= 0 \\ Q3 + Q4 - 0,03 &= 0 \\ Q7 + Q5 - Q4 - 0,03 &= 0 \end{aligned}$$

SE MANTIENEN IGUAL

$$\begin{aligned} K1 * Q1 + K7 * Q7 - K5 * Q5 - K6 * Q6 &= 0 \\ K2 * Q2 + K3 * Q3 - K4 * Q4 - K7 * Q7 &= 0 \end{aligned}$$

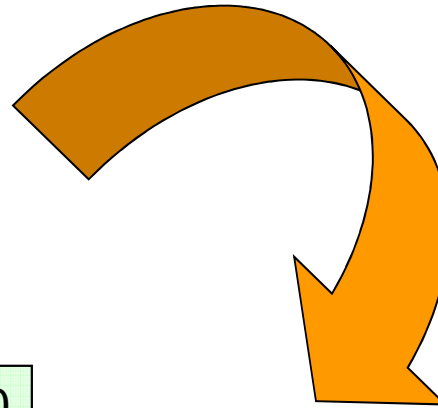
AHORA CON COEFICIENTES K

Método lineal: Caso tipo (Sistemas de ecuaciones)

Sistema de ecuaciones de 7 x 7

$$\begin{aligned}0,2 - Q1 - Q6 &= 0 \\ Q1 - Q2 - Q7 - 0,06 &= 0 \\ Q2 - Q3 - 0,04 &= 0 \\ Q3 + Q4 - 0,03 &= 0 \\ Q7 + Q5 - Q4 - 0,03 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K1 * Q1 + K7 * Q7 - K5 * Q5 - K6 * Q6 &= 0 \\ K2 * Q2 + K3 * Q3 - K4 * Q4 - K7 * Q7 &= 0\end{aligned}$$



Sistema MATRICIAL de 7 x 7

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \end{bmatrix}$$

Método lineal: Caso tipo (el sistema matricial)

Matriz de coeficientes variables



Incógnitas



Vector

independiente



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \end{bmatrix}$$

Método lineal: Caso tipo (el sistema matricial)

Coeficientes de las ecuaciones de continuidad

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	Q_1	B_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	Q_2	B_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	Q_3	B_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	Q_4	B_4
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{57}	Q_5	B_5
a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}	a_{67}	Q_6	B_6
a_{71}	a_{72}	a_{73}	a_{74}	a_{75}	a_{76}	a_{77}	Q_7	B_7

En el caso de continuidad este valor corresponde a las solicitaciones conocidas en los nodos con signo contrario


En el caso de Bernoulli este valor corresponde a las energías conocidas, tal como energía de tanques

Coeficientes variables "K"


Las ecuaciones se pueden arreglar dentro de la matriz en cualquier orden

Método lineal: Caso tipo (importancia de mantener la convención de signos)

-1	0	0	0	0	-1	0	Q_1	-0.2
1	-1	0	0	0	0	-1	Q_2	0.06
0	1	-1	0	0	0	0	Q_3	0.04
0	0	1	1	0	0	0	Q_4	0.03
0	0	0	-1	1	0	1	Q_5	0.03
K_1	0	0	0	$-K_5$	$-K_6$	K_7	Q_6	0
0	K_2	K_3	$-K_4$	0	0	$-K_7$	Q_7	0


(-Q2)

 Nodo A




(+Q2)

 Nodo B

Q2 sale del
nodo A

Q2 entra al
nodo A

(+Q7)


Malla A

(-Q7)


Malla B



Método lineal: Caso tipo (Chequeo del sistema matricial)

$$\begin{bmatrix}
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 K1 & 0 & 0 & 0 & -K5 & -K6 & K7 \\
 0 & K2 & K3 & -K4 & 0 & 0 & -K7
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_4 \\
 Q_5 \\
 Q_6 \\
 Q_7
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -0.2 \\
 0.06 \\
 0.04 \\
 0.03 \\
 0.03 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Por el despeje ver que los caudales conocidos se escriben como (-) el valor de acuerdo a la convención.

Ver que todas las columnas tienen al menos un coeficiente k asociado, esto implica que todos los caudales incógnitas están contemplados en las ecuaciones de Bernoulli

Método lineal: Caso tipo (Suposición inicial)

Para poder introducir valores numéricos a la variable K, es necesario suponer unos valores iniciales de flujo. Los valores iniciales NO DEBEN guardar ninguna proporción física para respetar continuidad. Incluso puede tomarse un número único de manera arbitraria para todos los valores inicialmente (como el mostrado por el arreglos II)

Arreglo I: Valores iniciales tomados para los cálculos mostrados en esta presentación

Caudal [m ³ /s]	Valor inicial
1	0.12
2	0.05
3	0.01
4	0.02
5	0.04
6	0.08
7	0.01

Arreglo II

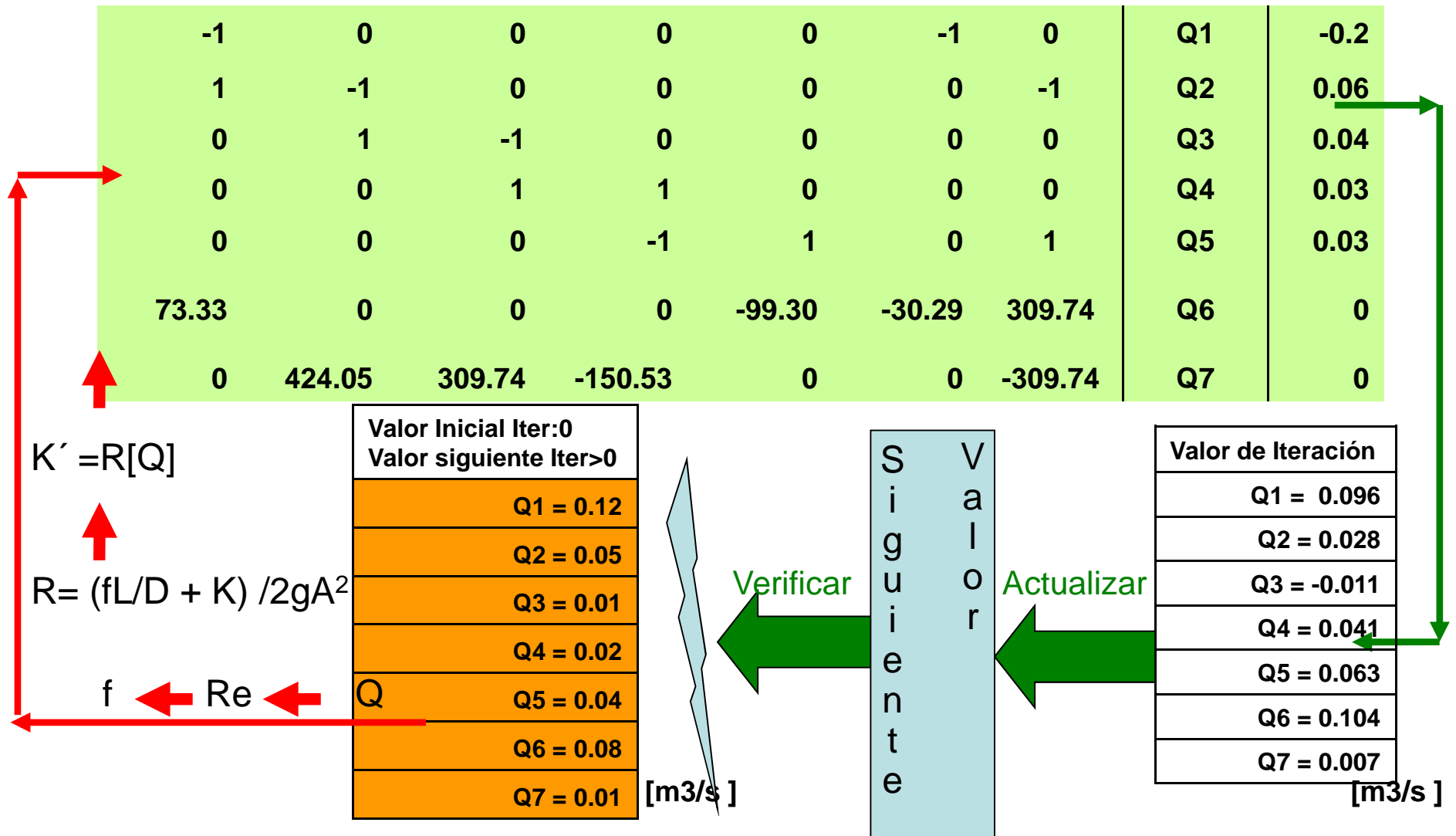
Caudal [m ³ /s]	Valor inicial
1	0.06
2	0.06
3	0.06
4	0.06
5	0.06
6	0.06
7	0.06

Método lineal: Caso tipo (Matriz inicial)

- En esta caso particular la matriz queda como:

-1	0	0	0	0	0	-1	0	Q1	-0.2
1	-1	0	0	0	0	0	-1	Q2	0.06
0	1	-1	0	0	0	0	0	Q3	0.04
0	0	1	1	0	0	0	0	Q4	0.03
0	0	0	-1	1	0	0	1	Q5	0.03
73.33	0	0	0	-99.30	-30.29	309.74		Q6	0
0	424.05	309.74	-150.53	0	0	-309.74		Q7	0

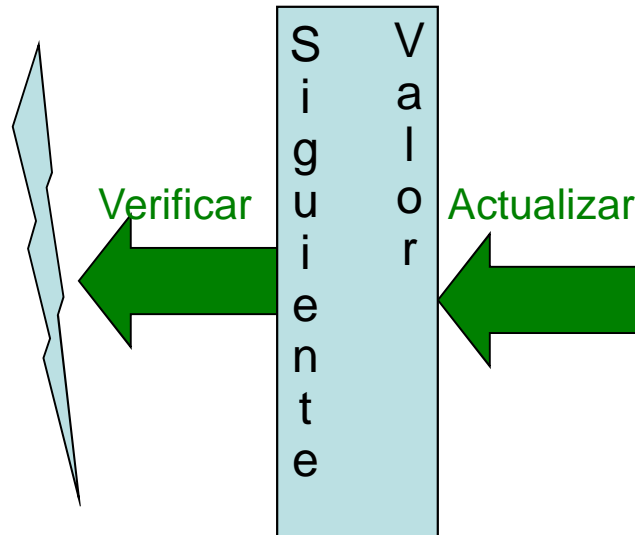
Método lineal: Caso tipo (Solución)



Método lineal: Caso tipo (Solución)

Caudal	Valor Inicial [m3/s]
1	0.12
2	0.05
3	0.01
4	0.02
5	0.04
6	0.08
7	0.01

Caudal	Valor de Iteración [m3/s]
1	0.11
2	0.04
3	0.00
4	0.03
5	0.05
6	0.09
7	0.01



Actualizar

Verificar

Verificar

1) promedio

$$\frac{1}{2} \left(\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{matrix} \right)_{\text{inicial}} + \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{matrix} \text{ iteración} = \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{matrix} \text{ siguiente}$$

1) Diferencia

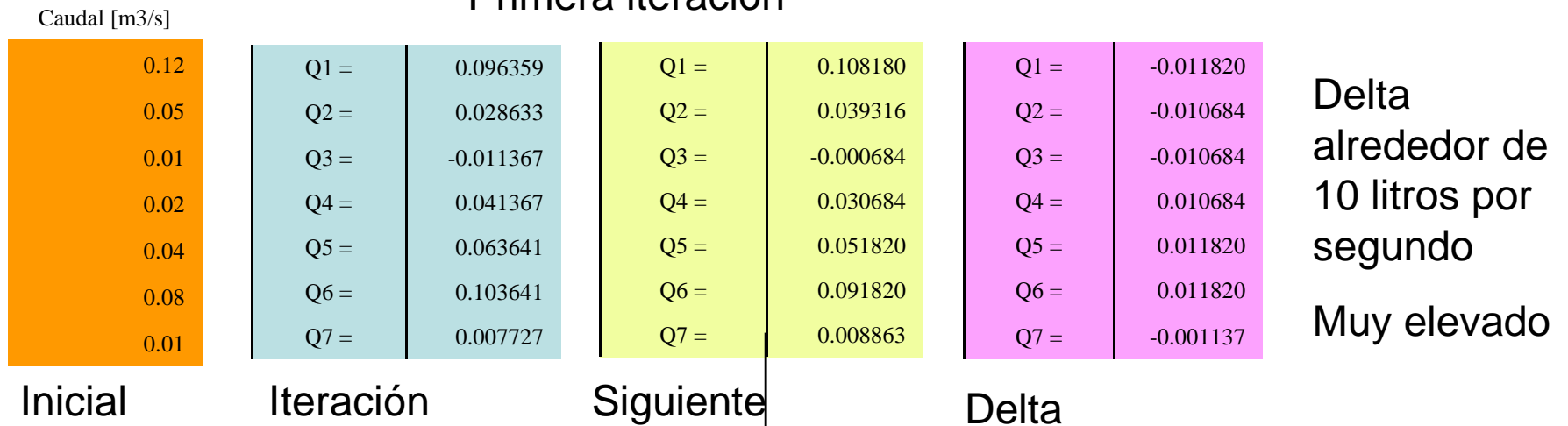
$$\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{matrix} \text{ siguiente} - \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{matrix} \text{ inicial} = \begin{matrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \\ \Delta Q_5 \\ \Delta Q_6 \\ \Delta Q_7 \end{matrix}$$

2) Tolerancia

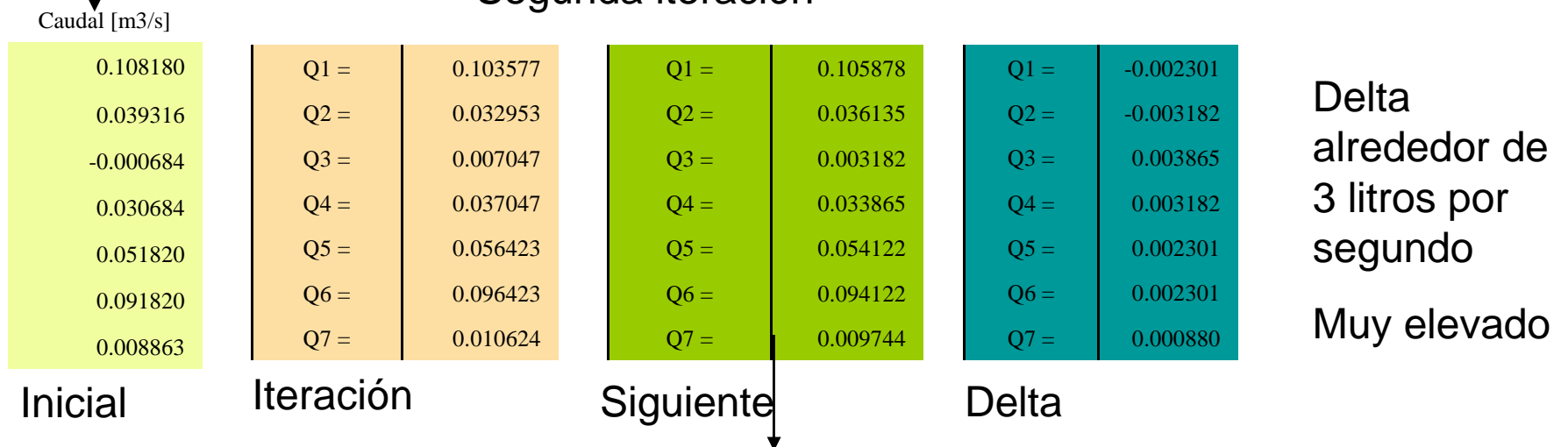
$$\begin{matrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \\ \Delta Q_5 \\ \Delta Q_6 \\ \Delta Q_7 \end{matrix} \leq \begin{matrix} TOL \\ TOL \\ TOL \\ TOL \\ TOL \\ TOL \\ TOL \end{matrix}$$

Método lineal: Caso tipo (Iteraciones)

Primera iteración



Segunda iteración



Método lineal: Caso tipo (Cambios de signo)

Primera iteración

0.12	Q1 =	0.108180
0.05	Q2 =	0.039316
0.01	Q3 =	-0.000684
0.02	Q4 =	0.030684
0.04	Q5 =	0.051820
0.08	Q6 =	0.091820
0.01	Q7 =	0.008863

Inicial

Siguiente

Segunda iteración

0.108180	Q1 =	0.105878
0.039316	Q2 =	0.036135
-0.000684	Q3 =	0.003182
0.030684	Q4 =	0.033865
0.051820	Q5 =	0.054122
0.091820	Q6 =	0.094122
0.008863	Q7 =	0.009744

Inicial

Siguiente

El caudal Q3 ahora es negativo → cambió de sentido de flujo con respecto al sentido propuesto

El caudal Q3 ahora es positivo → mantiene el sentido de flujo propuesto

Método lineal: Cambios de sentido

- Es muy probable que la suposición inicial de sentidos de flujo NO coincida con la distribución solución, por lo tanto el sistema mostrado tiene que ser capaz de captar cambios en los sentidos de las direcciones individuales
- A partir de la segunda iteración se puede aplicar:

$$\begin{bmatrix}
 -1 \frac{Q_1}{|Q_1|} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \frac{Q_6}{|Q_6|} & 0 \\
 1 \frac{Q_1}{|Q_1|} & -1 \frac{Q_2}{|Q_2|} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \frac{Q_7}{|Q_7|} \\
 0 & 1 \frac{Q_2}{|Q_2|} & -1 \frac{Q_3}{|Q_3|} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \frac{Q_3}{|Q_3|} & 1 \frac{Q_4}{|Q_4|} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 \frac{Q_4}{|Q_4|} & 1 \frac{Q_5}{|Q_5|} & 0 & 1 \frac{Q_7}{|Q_7|} \\
 K_1 \frac{K_1_{previo}}{|K_1_{previo}|} & 0 & 0 & 0 & -K_5 \frac{K_5_{previo}}{|K_5_{previo}|} & -K_6 \frac{K_6_{previo}}{|K_6_{previo}|} & K_7 \frac{K_7_{previo}}{|K_7_{previo}|} \\
 0 & K_2 \frac{K_2_{previo}}{|K_2_{previo}|} & K_3 \frac{K_3_{previo}}{|K_3_{previo}|} & -K_4 \frac{K_4_{previo}}{|K_4_{previo}|} & 0 & 0 & -K_7 \frac{K_7_{previo}}{|K_7_{previo}|}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_4 \\
 Q_5 \\
 Q_6 \\
 Q_7
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -0.2 \\
 0.06 \\
 0.04 \\
 0.03 \\
 0.03 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

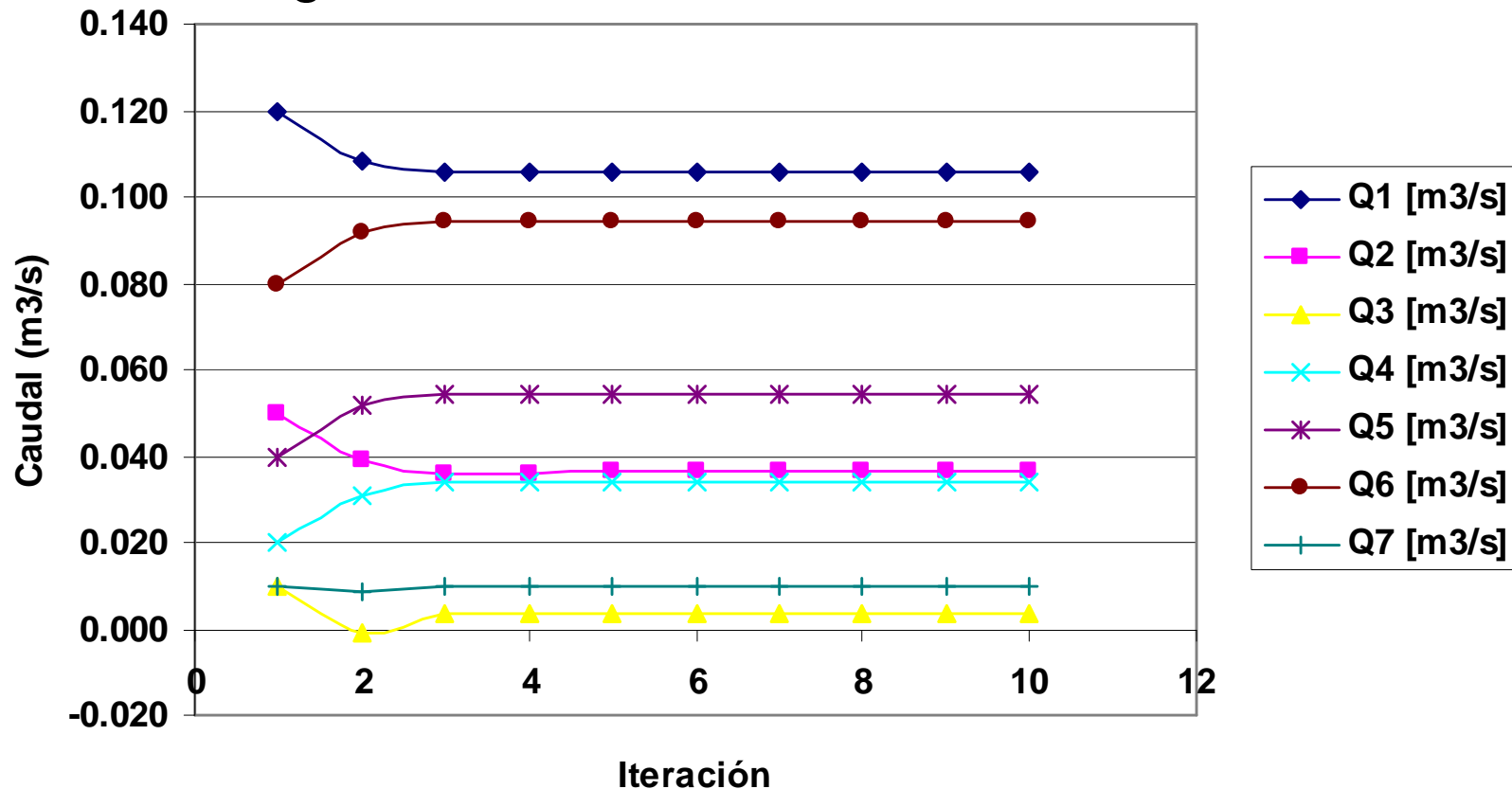
Método lineal: Cambios de sentido

$$\begin{bmatrix}
 -1 \frac{Q1}{|Q1|} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \frac{Q6}{|Q6|} & 0 \\
 1 \frac{Q1}{|Q1|} & -1 \frac{Q2}{|Q2|} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \frac{Q7}{|Q7|} \\
 0 & 1 \frac{Q2}{|Q2|} & -1 \frac{Q3}{|Q3|} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \frac{Q3}{|Q3|} & 1 \frac{Q4}{|Q4|} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 \frac{Q4}{|Q4|} & 1 \frac{Q5}{|Q5|} & 0 & 1 \frac{Q7}{|Q7|} \\
 K1 \frac{K1_{previo}}{|K1_{previo}|} & 0 & 0 & 0 & -K5 \frac{K5_{previo}}{|K5_{previo}|} & -K6 \frac{K6_{previo}}{|K6_{previo}|} & K7 \frac{K7_{previo}}{|K7_{previo}|} \\
 0 & K2 \frac{K2_{previo}}{|K2_{previo}|} & K3 \frac{K3_{previo}}{|K3_{previo}|} & -K4 \frac{K4_{previo}}{|K4_{previo}|} & 0 & 0 & -K7 \frac{K7_{previo}}{|K7_{previo}|}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_4 \\
 Q_5 \\
 Q_6 \\
 Q_7
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -0.2 \\
 0.06 \\
 0.04 \\
 0.03 \\
 0.03 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

- Para los valores iniciales obviamente todos los signos serán positivos, los signos solo harán efecto en aquellos casos donde el valor siguiente tenga signo contrario a la iteración previa. NOTA: cambia en signo de toda la columna
- NOTA: ver en los archivos de Excel adjuntos se utiliza esta formulación

Método lineal: Caso tipo (Solución)

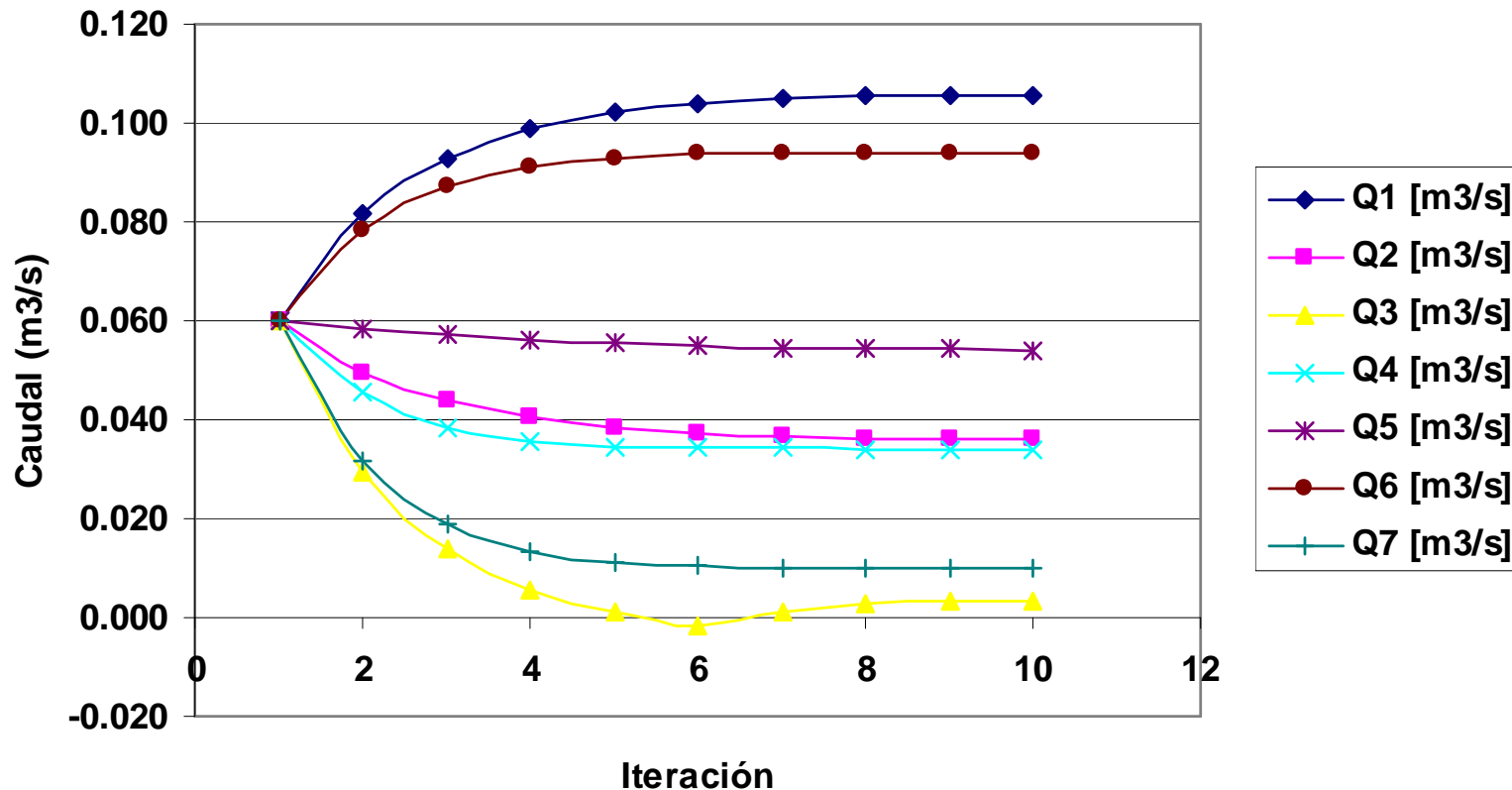
- Convergencia y número de iteraciones antes de converger:



Gráfica para valores iniciales propuestos en la presentación

Método lineal: Caso tipo (Solución)

- Convergencia y número de iteraciones antes de converger:



Gráfica para otros valores aleatorios $Q=0.060$ m³/s (todos iguales)